Wybrane elementy badań operacyjnych

Przykład 1. GWOŹDZIE.

Pewna fabryczka może produkować dwa gatunki gwoździ II i I. Do wyprodukowania tony gwoździ II gatunku potrzeba 1,2 tony stali oraz 1 roboczogodzinę pracy, do wyprodukowania 1 tony I gatunku gwoździ potrzeba 1,3 tony stali oraz 1,2 roboczogodziny. Minimalne dostawy wynoszą dla drugiego gatunku 50 ton, a dla pierwszego 30 ton. Zysk z 1 tony II gatunku wynosi 200 złotych, a zysk z jednej tony I gatunku 250 złotych. Tygodniowe zasoby stali wynoszą 180 ton, a tygodniowa moc przerobowa 200 roboczogodzin. Ile ton gwoździ I i II gatunku należy wyprodukować w ciągu tygodnia, aby zysk był największy.

MODEL MATEMATYCZNY

x_1 - tygodniowa produkcja gwoździ I gatunku

x_2 - tygodniowa produkcja gwoździ II gatunku

FUNKCJA CELU (ZYSKU)

$$f = 250x_1 + 200x_2$$

OGRANICZENIA

$$\begin{gathered} x_1 \geqslant 30 \\ x_2 \geqslant 50 \\ 1,3x_1 + 1,2x_2 \leqslant 180 \\ 1,2x_1 + x_2 \leqslant 200. \end{gathered}$$

Przykład 2. POŚREDNIK (ZAGADNIENIE TRANSPORTOWE)

Pewien pośrednik kupuje ten sam towar u 2 dostawców i dostarcza go trzem odbiorcom. Znamy cenę zakupu u każdego dostawcy i cenę zbytu u każdego odbiorcy. Znamy też maksymalne i minimalne ilości towaru sprzedawanego przez poszczególnych dostawców i kupowanego przez poszczególnych odbiorców. Zbuduj model matematyczny.

MODEL 1, bardziej skomplikowany, ale narzucający się

Wprowadzamy oznaczenia:

i - numer dostawcy, $i = 1, 2$
j - numer odbiorcy, $j = 1, 2, 3$
a_i - minimalna ilość towaru sprzedawanego przez i-tego dostawcę
b_i - maksymalna ilość towaru sprzedawanego przez i-tego dostawcę
c_j - minimalna ilość towaru kupowanego przez j-tego odbiorcę
d_j - maksymalna ilość towaru kupowanego przez j-tego odbiorcę
k_i - cena zakupu towaru u i-tego dostawcy
p_j - cena sprzedaży towaru j-temu odbiorcy
a_{ij} - koszt jednostkowy transportu od i-tego dostawcy do j-tego odbiorcy

ZMIENNE DECYZYJNE

z_i - ilość towaru zakupionego u i-tego dostawcy
y_j - ilość towaru sprzedanego j-temu odbiorcy
x_{ij} - ilość towaru przewiezionego od i-tego dostawcy do j-tego odbiorcy

Razem 11 zmiennych.

FUNKCJA CELU (ZYSK)

$$f = \sum_{j=1}^{3} p_j y_j - \sum_{i=1}^{2} k_i z_i - \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_{ij}.$$

WARUNKI OGRANICZAJĄCE

$$\sum_{j=1}^{3} x_{ij} = z_i, i = 1, 2 \quad (*)$$

$$\sum_{i=1}^{2} x_{ij} = y_j, j = 1, 2, 3 \quad (**)$$

$$a_i \leqslant z_i \leqslant b_i, i = 1, 2$$

$$c_j \leqslant y_j \leqslant d_j, j = 1, 2, 3$$

$$z_i \geqslant 0, i = 1, 2,$$
$$y_j \geqslant 0, j = 1, 2, 3,$$
$$x_{ij} \geqslant 0, i = 1, 2; j = 1, 2, 3.$$

Razem 21 warunków!

D y g r e s j a: ile byłoby warunków przy 3 dostawcach i 3 odbiorcach, a ile przy 4 odbiorcach i 4 dostawcach?

Okazuje się, że można ten model znacznie uprościć i wykorzystując równości $(*)$ i $(**)$ oprzeć się na tylko 6 zmiennych decyzyjnych x_{ij}.

Wprowadzimy mianowicie nowe parametry

$$u_{ij} = p_j - k_i - a_{ij}.$$

Wtedy funkcja celu wygląda następująco

$$f = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} u_{ij} x_{ij},$$

a warunki ograniczające

$$a_i \leqslant \sum_{j=1}^{3} x_{ij} \leqslant b_i, i = 1, 2$$
$$c_j \leqslant \sum_{i=1}^{2} x_{ij} \leqslant d_j, j = 1, 2, 3$$
$$x_{ij} \geqslant 0, i = 1, 2; j = 1, 2, 3.$$

Razem już tylko 11 warunków.

Zauważmy, że współczynniki e_{ij} odpowiadają za koszty transportu. Jeśli ograniczymy się tylko do nich (zakładając, że ceny u wszystkich dostawców są takie same oraz u wszystkich odbiorców sa takie same), to otrzymamy problem nazywany **ZAGADNIENIEM TRANSPORTOWYM**.

Zakłada się, że odbiorcy muszą dostać ustaloną ilość towaru (oznacza to, że $c_j = d_j$). Przy dostawcach rozważamy tylko ograniczenie górne.

Oczywiście zysk będzie największy, gdy koszty transportu będą najmniejsze.

Prowadzi to do modelu:

Funkcja celu:

$$f = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_{ij},$$

szukamy jej **minimum**.

Warunki ograniczające:

$$\sum_{j=1}^{3} x_{ij} \leqslant b_i, i = 1, 2$$

$$\sum_{i=1}^{2} x_{ij} = c_j, j = 1, 2, 3$$

$$x_{ij} \geqslant 0, i = 1, 2; j = 1, 2, 3.$$

Wygodnie dane dla zagadnienia transportowego zapisywac w postaci tabeli, co zobaczymy w poniższym przykladzie liczbowym.

Pewien towar jest zmagazynowany w miejscowości A_1 w ilości 700 ton oraz w miejscowości A_2 w ilości 200 miejscowości A_3 w ilości 900 ton. Ma być on przewieziony do miejscowości M_1 w ilości 500 ton oraz miejscowości M_2 w ilości 1200 ton. Koszt przewozu jednej tony pomiędzy miejscowościami podany jest w tabeli

	M_1	M_2
A_1	75	42
A_2	25	25
A_3	65	24

.

Model wygląda następująco:

Najpierw wypiszmy dane odpowiadające ogólnemu modelowi:

Zauważmy, że tym razem mamy 3 „dostawców” i 2 „odbiorców”, czyli i zmienia sie od 1 do 2, zaś j od 1 do 3. $a_{11} = 75$, $a_{12} = 42$, $a_{21} = 25$, $a_{22} = 25$, $a_{31} = 65$, $a_{32} = 24$. $b_1 = 700$, $b_2 = 200$, $b_3 = 900$, $c_1 = 500$, $c_2 = 1200$.

Funkcja celu ma postać:

$$f = 75x_{11} + 42x_{12} + 25x_{21} + 25x_{22} + 65x_{31} + 24x_{32}.$$

Warunki ograniczające:

$$x_{11} + x_{12} \leqslant 700,$$
$$x_{21} + x_{22} \leqslant 200,$$
$$x_{31} + x_{32} \leqslant 700.$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 500,$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1200.$$

Zapiszemy ten model w postaci tabeli:

	M_1	M_2	znak	b_i
A_1	75	42	$\leqslant$	700
A_2	25	25	$\leqslant$	200
A_3	65	24	$\leqslant$	900
znak	$=$	$=$		
	500	1200		

PRZYKŁAD 3. DZIAŁALNOŚĆ ROLNIKA

Rolnik posiada 40 hektarów ziemi. Może hodować tuczniki i uprawiać ziemniaki j zboże. Jeden tucznik potrzebuje 4 q ziemniaków i 2 q zboża i wymaga dodatkowo 200 złotych (robocizna, witaminy, weterynarz itp.) Uprawa hektara ziemniaków kosztuje 800 zł. nakładu (nawozy, robocizna, paliwo, środki ochrony roślin itp.) i daje plon 200 q. Uprawa hektara zboża kosztuje 200 zł i daje plon 50 q. Cena sprzedaży jednego tucznika wynosi 300 złotych, 1 q ziemniaków 10 zł., a zboża 30 zł. Zasoby rolnika (robocizna, siła nabywcza itp) wynoszą 40000 zł. Zbuduj model matematyczny.

ZMIENNE DECYZYJNE:

x_1 - liczba tuczników
x_2 - obszar uprawy ziemniaków
x_3 - obszar uprawy zboża
x_4 - ilość sprzedanych ziemniaków
x_5 - ilość sprzedanego zboża

FUNKCJA CELU (ZYSKU)

$$f = 300x_1 + 10x_4 + 30x_5 - (200x_1 + 800x_2 + 200x_3).$$

WARUNKI OGRANICZAJĄCE:

$$x_2 + x_3 \leqslant 40$$

$$4x_1 + x_4 \leqslant 200x_2$$

$$2x_1 + x_5 \leqslant 50x_3$$

$$200x_1 + 800x_2 + 200x_3 \leqslant 40000$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0$$

x_1 - całkowite.

Ostatni warunek bardzo utrudnia rozwiązanie. Zwykle go się pomija i po uzyskaniu rozwiązania wybiera się liczbę całkowitą najbliższą uzyskanej.

ROZWIĄZANIE GEOMETRYCZNE

Rozważmy problem:

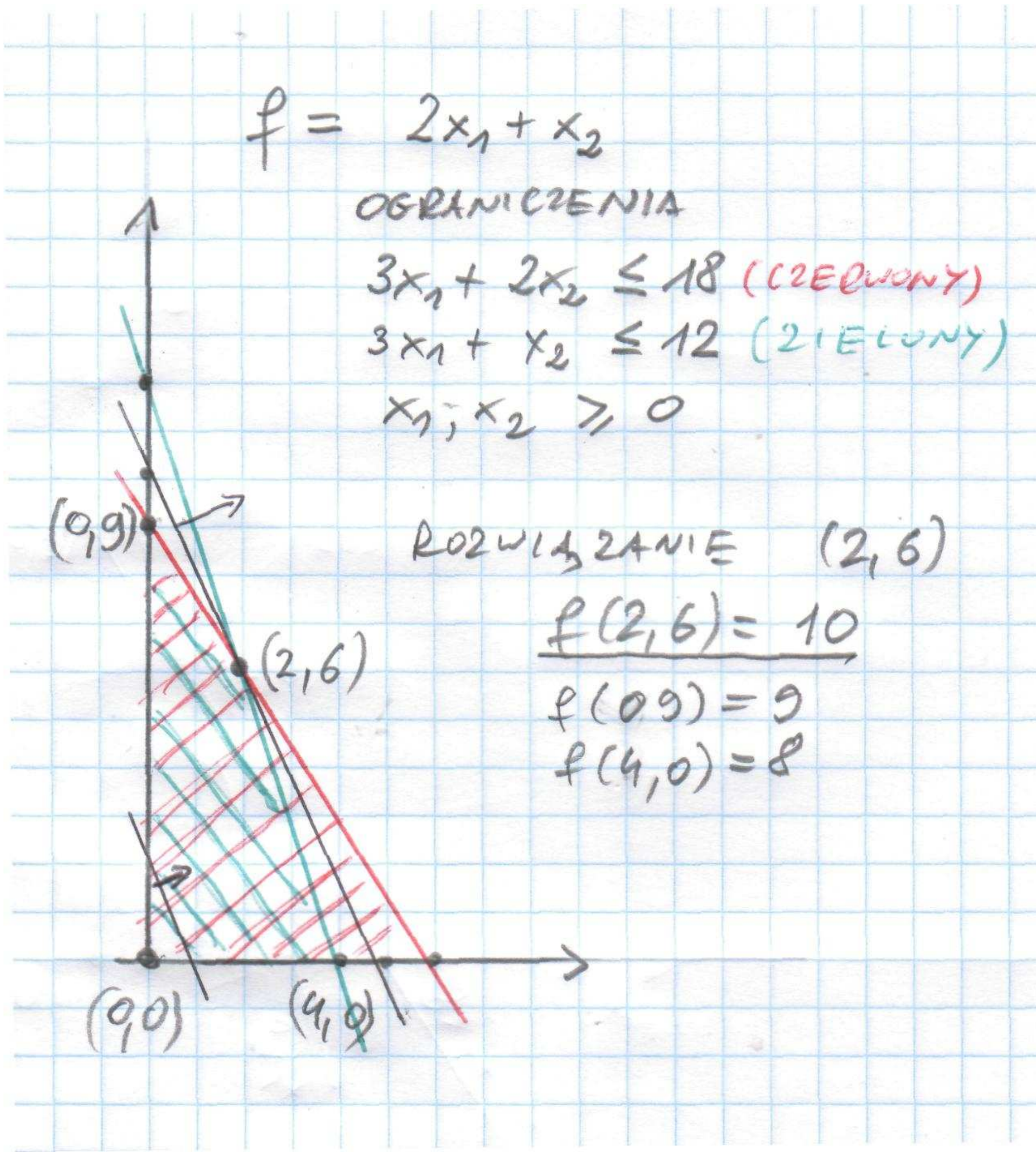
Znaleźć maksimum funkcji

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$$

przy warunkach

$3x_1 + 2x_2 \leqslant 18$
$3x_1 + x_2 \leqslant 12$
$x_1, x_2 \geqslant 0.$

Rozwiązanie geometryczne widzimy na następnej stronie.


f = 2x1 + x2
OGRANICZENIA
3x1 + 2x2 ≤ 18 (CZERWONY)
3x1 + x2 ≤ 12 (ZIELONY)
x1; x2 ≥ 0
ROZWIĄZANIE (2, 6)
f(2,6) = 10
f(0,9) = 9
f(4,0) = 8
(0,9)
(2,6)
(0,0)
(4,0)

Rozwiązanie geometryczne da się wykorzystać tylko przy małej liczbie zmiennych - w zasadzie tylko dwóch.

Przy większej liczbie zmiennych trzeba stosować inne metody.

Zaprezentujemy jedną z nich tzw. **algorytm sympleksowy**.

Zanim do niego przejdziemy wprowadzimy kilka wstępnych pojęć.

POSTAĆ KANONICZNA

W postaci kanonicznej poprzez dodanie nowych zmiennych zamieniamy warunki ograniczające mające postać nierówności na warunki mające postać równości.

Zaprezentujemy to na przykładzie poprzednim:

Znaleźć maksimum funkcji

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$$

przy warunkach
$3x_1 + 2x_2 \leqslant 18$
$3x_1 + x_2 \leqslant 12$
$x_1, x_2 \geqslant 0$.

Pierwszy warunek ograniczający $3x_1 + 2x_2 \leqslant 18$ zastąpimy warunkami:

$3x_1 + 2x_2 + s_1 = 18$ oraz $s_1 \geqslant 0$.

Drugi warunek ograniczający $3x_1 + x_2 \leqslant 12$ zastępujemy warunkami

$3x_1 + x_2 + s_2 = 12$ oraz $s_2 \geqslant 0$.

Ostatecznie forma standardowa zadania programowania liniowego będzie w postaci:

FUNKCJA CELU:

$$f = 2x_1 + x_2 + 0s_1 + 0s_2$$

WARUNKI OGRANICZAJĄCE:

$3x_1 + 2x_2 + s_1 = 18$
$3x_1 + x_2 + s_2 = 12$
$x_1, x_2, s_1, s_2 \geqslant 0$.

Zanim przejdziemy do dalszej części wykładu przypomnimy elementy rachunku macierzowego.

MACIERZE

Macierzą *o* n *wierszach i* k *kolumnach nazywamy układ* nk *liczb rzeczywistych zapisanych w postaci prostokątnej tabeli*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{22} & \dots & a_{nk} \end{bmatrix}.$$

Układ liczb $a_{i1}\ a_{i2}\ \dots\ a_{ik}$ nazywamy $i-$tym wierszem macierzy A, a układ liczb $\begin{matrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{matrix}$ nazywamy $j-$tą kolumną macierzy A.

Kolumnę macierzy możemy traktować jako wektor n-wymiarowy, a wiersz jako wektor k-wymiarowy.

Macierz oznacza się też następująco:

$$A = [a_{ij}]_{i=1,\dots,n}^{j=1,\dots,k}.$$

W wypadku gdy macierz ma n wierszy i k kolumn będziemy pisać, że jest to macierz $n \times k$.

Teraz omówimy operacje jakie możemy wykonywać na macierzach.

Najpierw przypomnimy co to jest iloczyn skalarny dwóch wektorów.

Iloczynem skalarnym wektorów $V = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ oraz $W = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ nazywamy liczbę

$$V \cdot W = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n.$$

Na przykład

$$(1,2,3)\cdot(-1,0,2) = 1\cdot(-1) + 2\cdot 0 + 3\cdot 2 = 5.$$

TRANSPONOWANIE

Macierzą transponowaną macierzy A nazywamy macierz oznaczaną A^T, której kolejne wiersze są kolejnymi kolumnami macierzy A. Zatem jeśli macierz A jest macierzą $n \times k$, to macierz A^T jest macierzą $k \times n$.

PRZYKŁAD. Jeśli $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, to $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$.

MNOŻENIE PRZEZ LICZBĘ

Jeśli A jest macierzą $n \times k$, a $q \in \mathbb{R}$, to możemy utworzyć macierz $qA = [c_{ij}]_{i=1,\dots,n}^{j=1,\dots,k}$, gdzie $c_{ij} = qa_{ij}$ dla każdego $i = 1,\dots,n$ i $j = 1,\dots,k$.

PRZYKŁAD.

$$5\cdot\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\cdot 1 & 5\cdot 2 & 5\cdot 3 \\ 5\cdot 4 & 5\cdot 5 & 5\cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 20 & 25 & 30 \end{bmatrix}.$$

DODAWANIE

Jeśli obie macierze A i B są macierzami $n \times k$, to możemy utworzyć macierz $C = A + B = [c_{ij}]_{i=1,\dots,n}^{j=1,\dots,k}$, gdzie $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, dla każdego $i = 1,\dots,n$ i $j = 1,\dots,k$.

PRZYKŁAD. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 3 & 8 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 2+7 \\ 3+3 & 4+8 \\ 5+1 & 6+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 6 & 12 \\ 6 & 15 \end{bmatrix}$.

Dodawanie macierzy i mnożenie przez liczbę spełniają warunki

$$(q+r)A = qA + rA,$$

$$q(A+B) = qA + qB,$$

$$(A+B)^T = A^T + B^T.$$

MNOŻENIE MACIERZY

Jeśli macierz A ma tyle samo kolumn ile wierszy ma macierz B, czyli A jest macierzą $n \times k$, a B jest macierzą $k \times p$, to możemy utworzyć macierz $A \cdot B = C = [c_{ij}]_{i=1,\ldots,n}^{j=1,\ldots,p}$, gdzie

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

Inaczej mówiąc c_{ij} jest iloczynem skalarnym wektora utworzonego z $i-$tego wiersza macierzy A i wektora utworzonego z $j-$tej kolumny macierzy B.

Często opuszczamy znak $\cdot$ i piszemy zamiast $A \cdot B$ po prostu AB.

PRZYKŁAD. Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}.$

Możemy wykonać działania zarówno AB jak i BA. Niech $AB = C$. Wówczas C będzie macierzą 2×2.

Obliczając według powyższej recepty mamy

$$\begin{aligned} c_{11} &= 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 20 \\ c_{12} &= 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 7 = 38 \\ c_{21} &= 4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 4 = 47 \\ c_{22} &= 4 \cdot 5 + 5 \cdot 6 + 6 \cdot 7 = 92. \end{aligned}$$

Zatem $AB = \begin{bmatrix} 20 & 38 \\ 47 & 92 \end{bmatrix}.$

Natomiast macierz BA będzie macierzą 3×3. Mamy:

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\cdot 1+5\cdot 4 & 2\cdot 2+5\cdot 5 & 2\cdot 3+5\cdot 6 \\ 3\cdot 1+6\cdot 4 & 3\cdot 2+6\cdot 5 & 3\cdot 3+6\cdot 6 \\ 4\cdot 1+7\cdot 4 & 4\cdot 2+7\cdot 5 & 4\cdot 3+7\cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 29 & 36 \\ 27 & 36 & 45 \\ 32 & 43 & 54 \end{bmatrix}.$$

PRZYKŁAD. Niech $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Wtedy $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, natomiast $BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

WNIOSEK:

Mnożenie macierzy nie jest przemienne.

Natomiast prawdziwa jest rozdzielność mnożenia macierzy względem dodawania, czyli

$$\boxed{\text{(A+B)C = AC + BC} \quad \text{A(B+C) = AB+AC,}}$$

przy czym w pierwszej kolejności wykonuje się mnożenie, a potem dodawanie.

Operacje elementarne

Operacjami elementarnymi nazywamy:

1. Mnożenie i-tego wiersza macierzy przez dowolną liczbę różną od zera.
2. Dodanie do i-tego wiersza macierzy innego wiersza macierzy pomnożonego przez dowolną liczbę.
3. Zamianę miejscami dwóch dowolnych wierszy macierzy.

PRZYKŁAD. Dana jest macierz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Poprzez operacje elementarne przekształcić tę macierz w macierz $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

Rozwiązanie

Krok pierwszy: do pierwszego wiersza dodajemy wiersz drugi pomnożony przez $-1/3$ - operacja typu 2. Otrzymujemy macierz $\begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Krok drugi: mnożymy pierwszy wiersz przez $3/2$ - operacja typu 1. Otrzymujemy macierz $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Krok trzeci: do drugiego wiersza dodajemy pierwszy wiersz przemnożony przez -4 - operacja typu 2. Otrzymujemy macierz $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$.

Krok czwarty: mnożymy drugi wiersz przez $2/3$ - operacja typu 1. Otrzymujemy macierz B.

Słowne opisywanie operacji, które wykonujemy jest uciążliwe. Wprowadzimy pewne skrótowe opisy. Będziemy oznaczać i-ty wiersz macierzy przed wykonaniem operacji przez w_i, a i-ty wiersz macierzy po dokonaniu operacji przez w_i'. I tak na przykład pierwszą operację w powyższym przykładzie możemy zapisać następująco:

$$w_1' = w_1 - \frac{1}{3} w_2.$$

Natomiast cały schemat rozwiązania zapiszemy tak:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad w_1' = w_1 - \tfrac{1}{3} w_2$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad w_1' = \tfrac{3}{2} w_1$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad w_2' = w_2 - 4w_1$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad w_2' = \tfrac{2}{3} w_2$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Można było skrócić całą procedurę wykonując w jednym kroku kilka operacji elementarnych. Mogliśmy na przykład zapisać nasze rozwiązanie tak:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} w_1' = w_1 - \frac{1}{3}w_2 \\ w_1' = \frac{3}{2}w_1 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} w_2' = w_2 - 4w_1 \\ w_2' = \frac{2}{3}w_2 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

MACIERZ JEDNOSTKOWA

Macierzą jednostkową I_n nazywamy macierz o n wierszach i n kolumnach mającą na głównej przekątnej jedynki, poza tym same zera.

np.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

itd.

POSTAĆ BAZOWA MACIERZY

Załóżmy, że macierz A ma k kolumn i n wierszy, przy czym $k \geqslant n$. Powiemy, że macierz ma postać bazową, jeśli po wykreśleniu $k - n$ kolumn i przestawieniu kolejności pozostałych kolumn otrzymamy macierz jednostkową I_n. Te kolumny, kt

Na przykład macierz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

ma postać bazową. Usuwamy drugą kolumnę i zamieniamy miejscami pozostałe kolumny. Kolumny bazowe macierzy A to kolumny pierwsza i trzecia.

Macierz

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & 0 & 0 & 6 \\ 5 & 0 & 3 & 0 & 1 & 7 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

też ma postać bazową: usuwamy 1, 3 i 6 kolumnę następnie przestawiamy w pozostałych drugą z trzecią. Kolumny bazowe macierzy B, to kolumny druga, czwarta i piąta.

PRZYKŁAD.

Przy pomocy operacji elementarnych sprowadzimy macierz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

do postaci bazowej, tak aby kolumnami bazowymi były pierwsza i trzecia.

Oznacza to, że pierwsza kolumna ma być postaci $\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}$, a druga $\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}$

Ponieważ chcemy, aby w pierwszej kolumnie i drugim wierszu pojawiło się 0 stosujemy operację elementarną:

$$w_2' = w_2 - 4w_1.$$

Otrzymujemy macierz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \end{bmatrix}.$$

Już pierwsza kolumna jest taka, jaką chcemy

Teraz chcemy, aby w trzeciej kolumnie i pierwszym wierszu pojawiło się 0, wykonujemy zatem operację:

$$w_1' = w_1 + \frac{1}{2}w_2.$$

Otrzymujemy macierz
$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & -3 & -6 \end{bmatrix}.$$

Wreszcie na końcu musimy podzielić pierwszy wiersz przez -6, czyli wykonać operację
$$w_2' = -\frac{1}{6}w_2.$$
Otrzymujemy macierz w postaci bazowej
$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$
takiej jak chcieliśmy.

PRZYKŁAD:

Przy pomocy operacji elementarnych sprowadzimy macierz
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
do postaci bazowej, tak aby kolumnami bazowymi były druga, trzecia i pierwsza.

Oznacza to, że druga kolumna ma być postaci $\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$, trzecia $\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}$, a pierwsza $\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$.

Stosujemy kolejno operacje elementarne: 1) $w_3' = w_3 - w_1$. Otrzymujemy macierz
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix};$$

2) $w_1' = w_1 + w_3$. Otrzymujemy macierz
$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix};$$

3) $w_3' = w_3 + 4w_2$. Otrzymujemy macierz

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix};$$

4) $w_1' = w_1 + 2/5w_3$, $w_2' = w_3 - 1/5w_3$. Otrzymujemy macierz

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -7/5 & 0 \\ 0 & 0 & 4/5 & 1 \\ 5 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix};$$

5) $w_1' = 1/2w_1$, $w_3' = 1/5w_3$. Otrzymujemy macierz

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -7/10 & 0 \\ 0 & 0 & 4/5 & 1 \\ 1 & 0 & 6/5 & 0 \end{bmatrix}$$

w takiej postaci, o jaką chodzi.

TERAZ OMÓWIMY DOKŁADNIE ALGORYTM SYMPLEKSOWY.

Omówimy go początkowo dla **maksymalizacji** funkcji celu. Na zakończenie podamy co trzeba zmienić w przypadku minimalizacji.

Będziemy go ilustrować poniższym przykładem.

FUNKCJA CELU:

$$f = 4x_1 + x_2 \to \max$$

WARUNKI OGRANICZAJĄCE

$$3x_1 + 2x_2 \leqslant 18$$
$$4x_1 \leqslant 8$$
$$x_1, x_2 \geqslant 0$$

Tworzymy postać kanoniczną.

POSTAĆ KANONICZNA

FUNKCJA CELU:

$$f = 4x_1 + x_2 + 0s_1 + 0s_2 \to \max$$

WARUNKI OGRANICZAJĄCE:

$$3x_1 + 2x_2 + s_1 = 18$$
$$4x_1 + s_2 = 8$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2 \geqslant 0$$

ALGORYTM SYMPLEKSOWY

Oznaczamy zmienne początkowe przez $x_1, \ldots, x_n$, zmienne dodane przy tworzeniu postaci kanonicznej przez $s_1, \ldots, s_m$.

Współczynniki w funkcji celu oznaczamy przez $c_1, \dots c_n, c_{n+1}, \dots, c_{n+m}$. $c_p = 0$ dla $p > n$.

W rozważanym przykładzie $n = 2$, $m = 2$, $n + m = 4$, $c_1 = 4$, $c_2 = 1$, $c_3 = 0$, $c_4 = 0$.

Przypuśćmy, że jest m warunków ograniczających powstałych z nierówności (oprócz warunków $x_i \geqslant 0$, $s_j \geqslant 0$) postaci

$$a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n + a_{j(n+1)}s_1 + \dots + a_{j(n+m)}s_m = b_j$$

$$j = 1, 2, \dots k.$$

Np. w naszym przykładzie: $a_{11} = 3$, $a_{12} = 2$, $a_{13} = 1$, $a_{14} = 0$
$a_{21} = 4$, $a_{12} = 0$, $a_{13} = 0$, $a_{14} = 1$
$b_1 = 18$, $b_2 = 8$.

KROK 1

TWORZYMY TABLICĘ SYMPLEKSOWĄ W NASTĘPUJĄCEJ POSTACI

c_j		c_1	...	c_n	0	..	0	
c_B	bazowe	x_1	..	x_n	s_1	...	s_m	b_i
c_{p_1}	s_1	a_{11}	...	a_{1n}	$a_{1(n+1)}$	...	$a_{1(n+m)}$	b_1
...	...	...	...	...	...	...	...	...
c_{p_m}	s_m	a_{m1}	...	a_{mn}	$a_{m(n+1)}$	...	$a_{m(n+m)}$	b_m
z_j		z_1	...	z_n	z_{n+1}	...	z_{n+m}	
$c_j - z_j$		$c_1 - z_1$	...	$c_n - z_n$	$c_{n+1} - z_{n+1}$	...	$c_{n+m} - z_{n+m}$	

Macierz współczynników $A = [a_{ij}]_{i=1,\dots,m}^{j=1,\dots,n+m}$ musi mieć postać bazową.

W drugiej kolumnie wypisujemy zmienne bazowe, czyli zmienne odpowiadające kolumnom bazowym.

W pierwszej kolumnie c_B mamy współczynniki $c_{p_1}, \dots, c_{p_m}$ z funkcji celu odpowiadające zmiennym bazowym z drugiej kolumny.

W chwili startu zmienne bazowe to $s_1, \dots, s_m$ (w takiej kolejności), zatem te współczynniki są w chwili startu równe zero. z_j wyliczamy z wzoru

$$z_j = c_B \cdot \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \dots \\ a_{kj} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{m} c_{p_i} a_{ij}.$$

W ostatnim wierszu wpisujemy liczby $c_j - z_j$, $j = 1, 2, \dots n + m$.

Każdej tablicy sympleksowej odpowiada rozwiązanie bazowe. W takim rozwiązaniu zmienne niebazowe są równe zero.

Na przykład dla tablicy sympleksowej

c_j		4	3	0	0	
c_B	bazowe	x_1	x_2	s_1	s_2	b_i
0	s_1	0	2	1	3	12
4	x_1	1	0	0	1	2
z_j		4	0	0	4	
$c_j - z_j$		0	3	0	-4	

mamy $x_2 = 0$, $s_2 = 0$, $x_1 = 2$ (z drugiego równania), $s_1 = 12$ (z pierwszego równania) i funkcja celu jest równa $4 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + 0 \cdot 12 + 0 \cdot 0 = 8$.

W następnych krokach będziemy zamieniać zmienne bazowe poprawiając wynik.

KRYTERIUM OPTYMALNOŚCI

Badamy współczynniki w ostatnim wierszu czyli $c_j - z_j$. Jeśli wszystkie są niedodatnie, to kończymy pracę - rozwiązanie jest optymalne.

KRYTERIUM WEJŚCIA

Jeśli wśród liczb $c_j - z_j$ istnieją dodatnie, to wybieramy największą z nich. Niech będzie ona w kolumnie k-tej. Oznacza to, że nową zmienną bazową będzie zmienna x_k

KRYTERIUM WYJŚCIA

Rozważamy kolumnę macierzy A pod zmienną x_k. Jest to kolumna $\begin{bmatrix} a_{1k} \\ ... \\ a_{mk} \end{bmatrix}$.

Rozważamy najmniejszą spośród liczb $\frac{b_j}{a_{jk}}$ dla $a_{jk} > 0$. Niech to będzie np. liczba $\frac{b_p}{a_{pk}}$. Odpowiada to zmiennej bazowej s_p. Oznacza to, że zmienna bazowa x_k pojawi się w miejsce zmiennej bazowej s_p.

TWORZENIE NOWEJ TABLICY SYMPLEKSOWEJ

Poprzez operacje elementarne tak zmieniamy macierz $A|B$, aby pod zmienną x_k pojawił się wektor taki, jaki jest teraz pod zmienną s_p tzn. jedynka na p-tym miejscu, na pozostałych zera. Pod pozostałymi zmiennymi bazowymi musi pozostać to co było.

W drugiej kolumnie w miejsce zmiennej bazowej s_p usuwanej z bazy wpisujemy nazwę nowej zmiennej bazowej, czyli x_k, a w pierwszej zamiast współczynnika przy s_p (równego 0) wpisujemy współczynnik z funkcji celu przy x_k, czyli c_k.

PROCEDURĘ POWTARZAMY TAK DŁUGO, AŻ OTRZYMAMY ROZWIĄZANIE OPTYMALNE W KRYTERIUM OPTYMALNOŚCI

PRZEŚLEDZIMY TO NA ROZWAŻANYM PRZYKŁADZIE

POCZĄTKOWA TABLICA SYMPLEKSOWA

c_j		4	1	0	0	
c_B	bazowe	x_1	x_2	s_1	s_2	b_i
0	s_1	3	2	1	0	18
0	s_2	4	0	0	1	8
z_j		?	?	?	?	
$c_j - z_j$		?	?	?	?	

Wyliczamy z_j:

$$z_1 = c_B \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 0 \cdot 3 + 0 \cdot 4 = 0.$$

$$z_2 = c_B \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \cdot 2 + 0 \cdot 0 = 0.$$

$$z_3 = c_B \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0.$$

$$z_4 = c_B \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0.$$

Uzupełniamy tablicę sympleksową.

c_j		4	1	0	0	
c_B	bazowe	x_1	x_2	s_1	s_2	b_i
0	s_1	3	2	1	0	18
0	s_2	4	0	0	1	8
z_j		0	0	0	0	
$c_j - z_j$		4	1	0	0	

Stosujemy kryterium optymalności: W ostatnim wierszu istnieją wyrazy dodatnie, zatem rozwiązanie nie jest optymalne.

Stosujemy kryterium wejścia.

Maksimum $c_j - z_j$ wynosi 4 i mieści się w pierwszej kolumnie. Zatem $k = 1$, co oznacza, że nową zmienną bazową będzie x_1.

Stosujemy kryterium wyjścia

Liczymy minimum $\frac{b_j}{a_{jk}}$ dla $a_{jk} > 0$.

W naszym wypadku $k = 1$, czyli liczymy minimum spośród liczb $\frac{b_1}{a_{11}} = \frac{18}{3} = 6$ oraz $\frac{b_2}{a_{21}} = \frac{8}{4} = 2$.

Mniejszą jest druga z liczb otrzymana z drugiego wiersza odpowiadającego zmiennej bazowej s_2.

Zatem nowa zmienna bazowa x_1 ma zastąpić zmienną s_2.

Obecnie zmiennymi bazowymi będą s_1 - pozostanie w pierwszym wierszu oraz x_1 w drugim wierszu.

Oznacza to, że przez operacje elementarne kolumna pod x_1 mająca obecnie postać $\begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix}$ musi zmienić się w kolumnę $\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}$, a kolumna pod s_1 ma pozostać w postaci $\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}$.

W tym celu pierwszy wiersz przekształcamy następująco:

$$\begin{aligned} w_1' = w_1 - \frac{3}{4} w_2 &= \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & 0 & 18 \end{array}\right] - \frac{3}{4} \cdot \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 1 & -3/4 & 12 \end{array}\right], \end{aligned}$$

a drugi

$$w_2' = \frac{1}{4} w_2 = \frac{1}{4} \cdot \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/4 & 2 \end{array}\right].$$

Otrzymujemy nową tablicę sympleksową.

c_j		4	1	0	0	
c_B	bazowe	x_1	x_2	s_1	s_2	b_i
0	s_1	0	2	1	$-3/4$	12
4	x_1	1	0	0	$1/4$	2
z_j		?	?	?	?	
$c_j - z_j$		?	?	?	?	

Wyliczamy z_j:

$$z_1 = c_B \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \cdot 0 + 4 \cdot 1 = 4.$$

$$z_2 = c_B \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \cdot 2 + 4 \cdot 0 = 0.$$

$$z_3 = c_B \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \cdot 1 + 4 \cdot 0 = 0.$$

$$z_4 = c_B \cdot \begin{bmatrix} -3/4 \\ 1/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3/4 \\ 1/4 \end{bmatrix} = 0 \cdot (-3/4) + 4 \cdot 1/4 = 1.$$

Uzupełniamy tablicę sympleksową.

c_j		4	1	0	0	
c_B	bazowe	x_1	x_2	s_1	s_2	b_i
0	s_1	0	2	1	$-3/4$	12
4	x_1	1	0	0	$1/4$	2
z_j		4	0	0	1	
$c_j - z_j$		0	1	0	-1	

Stosujemy kryterium optymalności: W ostatnim wierszu istnieją wyrazy dodatnie, zatem rozwiązanie nie jest optymalne.

Stosujemy kryterium wejścia.

Maksimum $c_j - z_j$ wynosi 1 i mieści się w drugiej kolumnie. Zatem $k = 2$, co oznacza, że nową zmienną bazową będzie x_2.

Stosujemy kryterium wyjścia:

Liczymy minimum $\frac{b_j}{a_{jk}}$ dla $a_{jk} > 0$.

W naszym wypadku $k = 2$, czyli liczymy minimum spośród jednej tylko liczby $\frac{b_1}{a_{12}} = \frac{12}{2} = 6$

Otrzymana jest ona z pierwszego wiersza odpowiadającego zmiennej bazowej s_1.

Zatem nowa zmienna bazowa x_2 ma zastąpić zmienną s_1.

Obecnie zmiennymi bazowymi będą x_1 - pozostanie w drugim wierszu oraz x_2 pojawi się zamiast s_1 w pierwszym wierszu.

Oznacza to, że kolumna pod x_1 pozostanie bez zmian, czyli $\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}$, a kolumna pod x_2 musi przybrać postać $\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}$. Aby to osiągnąc wystarczy przekształcenie elementarne

$$w_1' = \frac{1}{2} w_1 = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 1 & -3/4 & 12 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1/2 & -3/8 & 6 \end{array} \right].$$

Drugi wiersz pozostaje bez zmian.

Otrzymujemy nową tablicę sympleksową.

	c_j	4	1	0	0	
c_B	bazowe	x_1	x_2	s_1	s_2	b_i
1	x_2	0	1	1/2	−3/8	6
4	x_1	1	0	0	1/4	2
	z_j	?	?	?	?	
	$c_j - z_j$	?	?	?	?	

Wyliczamy z_j:

$$z_1 = c_B \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot 0 + 4 \cdot 1 = 4.$$

$$z_2 = c_B \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot 1 + 4 \cdot 0 = 1.$$

$$z_3 = c_B \cdot \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot 1/2 + 4 \cdot 0 = 1/2.$$

$$z_4 = c_B \cdot \begin{bmatrix} -3/8 \\ 1/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3/8 \\ 1/4 \end{bmatrix} = 1 \cdot (-3/8) + 4 \cdot 1/4 = 5/8.$$

Uzupełniamy tablicę sympleksową.

c_j		4	1	0	0	
c_B	bazowe	x_1	x_2	s_1	s_2	b_i
1	x_2	0	1	1/2	−3/8	6
4	x_1	1	0	0	1/4	2
z_j		4	1	1/2	5/8	
$c_j - z_j$		0	0	−1/2	−5/8	

Ponieważ wszystkie wyrazy w ostatnim wierszu tablicy są niedodatnie, wnioskujemy że mamy optymalne rozwiązanie. W nim $x_1 = 2$, $x_2 = 6$, $f = 14$.

ZADANIE NA MINIMUM

Do tej pory omawialiśmy algorytm sympleksowy dla maksymalizacji funkcji celu. Przy minimalizacji warunki ograniczające mają przeważnie postać nierówności w drugą stronę dlatego zmienne swobodne występują w formie standardowej ze znakiem minus. Powoduje to, że startowa tablica sympleksowa budowana identycznie jak w przypadku maksymalizacji nie będzie w postaci bazowej.

Rozpatrzmy np. zadanie programowania liniowego

Zminimalizować funkcję

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2,$$

przy ograniczeniach

$$x_1 + 2x_2 \geqslant 3,$$

$$3x_1 + x_2 \geqslant 4,$$

$$x_1, x_2 \geqslant 0.$$

Wprowadzając nieujemne zmienne swobodne s_1 i s_2 zamieniamy nierówności na równości

$$x_1 + 2x_2 - s_1 = 3,$$

$$3x_1 + x_2 - s_2 = 4.$$

Teraz przy zmiennych swobodnych mamy znak $-$.

Zbudowanie początkowej tablicy sympleksowej podobnie jak dla maksymalizacji da nam nam tablicę następującą

c_j		1	1	0	0	
c_B	bazowe	x_1	x_2	s_1	s_2	b_i
0	s_1	1	2	-1	0	3
0	s_2	3	1	0	-1	4
z_j		?	?	?	?	
$c_j - z_j$		?	?	?	?	

Nie jest ona w postaci bazowej ze względu na minusy przed jedynkami w trzeciej i czwartej kolumnie macierzy A. Nic nie da pomnożenie wierszy przez -1 bo wyrazy wolne powinny być w algorytmie sympleksowym dodatnie - w przeciwnym wypadku startowe rozwiązanie bazowe będzie niedopuszczalne - zmienne s_i byłyby ujemne.

Jednym ze sposobów jest wprowadzenie do funkcji celu nowych zmiennych tzw. **zmiennych sztucznych** w taki sposób aby początkowe rozwiązanie z tymi zmiennymi jako bazowymi było bardzo duże. Uzyskamy to dobieraj/ac do nich duże współczynniki w funkcji celu. Spowoduje to, że w trakcie stosowania metody sympleksowej te nowe zmienne staną się zerami.

Ponieważ teraz będziemy rozwiązanie zmniejszać, wprowadzane są następujące korekty w porównaniu z zadaniem maksymalizacji:

1) Kryterium optymalności: wszystkie $c_j - z_j \geqslant 0$ zamiast $c_j - z_j \leqslant 0$.

2) Kryterium wejścia: $\min(c_j - z_j)$ zamiast $\max(c_j - z_j)$.

Pozostałe elementy algorytmu sympleksowego pozostają identyczne.

Prześledzimy to na następującym zadaniu programowania liniowego.

Funkcja celu

$$x_1 + x_2 \to \min$$

Ograniczenia

$$x_1 + 2x_2 \geqslant 3$$

$$3x_1 + x_2 \geqslant 4$$

$$x_1, x_2 \geqslant 0$$

Krok pierwszy - wprowadzamy zmienne swobodne $s_1, s_2 \geqslant 0$. Otrzymujemy postać kanoniczną.

Funkcja celu

$$x_1 + x_2 + 0s_1 + 0s_2 \to \min$$

Ograniczenia

$$x_1 + 2x_2 - s_1 = 3$$

$$3x_1 + x_2 - s_2 = 4$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2 \geqslant 0$$

Krok drugi - wprowadzamy zmienne sztuczne v_1 i v_2 i dodajemy do funkcji celu składnik $10v_2+10v_2$ oraz do równości odpowiednio v_1 i v_2. Otrzymujemy postać kanoniczną i jednocześnie bazową.

Funkcja celu

$$x_1 + x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 10v_2 + 10v_2 \to \min$$

Ograniczenia

$$x_1 + 2x_2 - s_1 + v_1 = 3$$

$$3x_1 + x_2 - s_2 + v_2 = 4$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, v_1, v_2 \geqslant 0$$

Startowa tablica sympleksowa ma postać (piszemy od razu uzupełnioną).

c_j		1	1	0	0	10	10	
c_B	bazowe	x_1	x_2	s_1	s_2	v_1	v_2	b_i
10	v_1	1	2	-1	0	1	0	3
10	v_2	3	1	0	-1	0	1	4
z_j		40	30	-10	-10	10	10	
$c_j - z_j$		-39	-29	10	10	0	0	

Kryterium optymalności – w ostatnim wierszu istnieją liczby ujemne – rozwiązanie można poprawić.

Kryterium wejścia

$$\min(c_j - z_j) = c_1 - z_1 = -39.$$

Oznacza to, że nową zmienną bazową będzie x_1.

Kryterium wyjścia

$$4/3 < 3/1$$

Zmienną usuwaną z bazy będzie v_2. W pierwszej kolumnie ma się pojawić wektor $\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}$. W tym celu stosujemy operacje elementarne

$$w_1' = w_1 - \frac{1}{3} w_2$$

$$w_2' = \frac{1}{3} w_2$$

Otrzymujemy nową tablicę sympleksową.

c_j		1	1	0	0	10	10	
c_B	bazowe	x_1	x_2	s_1	s_2	v_1	v_2	b_i
10	v_1	0	5/3	-1	1/3	1	$-1/3$	5/3
1	x_1	1	1/3	0	$-1/3$	0	1/3	4/3
z_j		1	17	-10	3	10	-3	
$c_j - z_j$		0	-16	10	-3	0	13	

Kryterium optymalności – w ostatnim wierszu istnieją liczby ujemne – rozwiązanie można poprawić.

Kryterium wejścia

$$\min(c_j - z_j) = c_2 - z_2 = -16.$$

Oznacza to, że nową zmienną bazową będzie x_2.

Kryterium wyjścia

$$\frac{5/3}{5/3} < \frac{4/3}{1/3}$$

Zmienną usuwaną z bazy będzie v_1. Oznacza to, że w drugiej kolumnie ma się pojawić wektor $\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}$. W tym celu stosujemy operacje elementarne

$$w_2' = w_2 - \frac{1}{5} w_1$$

$$w_1' = \frac{3}{5} w_1$$

Otrzymujemy nową tablicę sympleksową.

c_j		1	1	0	0	10	10	
c_B	bazowe	x_1	x_2	s_1	s_2	v_1	v_2	b_i
1	x_2	0	1	$-3/5$	$1/5$	$3/5$	$-1/5$	1
1	x_1	1	0	$1/5$	$-2/5$	$-1/5$	$2/5$	1
z_j		1	1	$-2/5$	$-1/5$	$2/5$	$1/5$	
$c_j - z_j$		0	0	$2/5$	$1/5$	$48/5$	$49/5$	

Wszystkie współczynniki $c_j - z_j$ są nieujemne. Otrzymujemy rozwiązanie bazowe optymalne: $s_1 = s_2 = v_2 = v_2 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 1$,

$$f = 1 + 1 = 2.$$

Rozwiązywanie zadań programowania liniowego programem solver

„Solver" jest dodatkiem do arkusza kalkulacyjnego openoffice calc (istnieje począwszy od wersji 3.1).

Poniżej opiszemy jak rozwiązać omawiane przez nas powyżej zadania programowania liniowego przy pomocy tego programu.

Zademonstrujemy to na podstawie uproszczonego zadania z początku wykładu. Rozwiązemy mianowicie zadanie:

FUNKCJA CELU (ZYSKU)

$$f = 250x_1 + 200x_2$$

OGRANICZENIA

$$1{,}3x_1 + 1{,}2x_2 \leqslant 180,$$
$$1{,}2x_1 + x_2 \leqslant 200,$$
$$x_1, x_2 \geqslant 0.$$

Otwieramy program „`calc`" i wpisujemy dane następująco:

Komórki, które wybieramy są tylko przykładowe!

W komórkach **b2** i **c2** wpisujemy współrzędne funkcji celu, czyli 200 i 250.

W komórkach **b4** i **c4** wpisujemy jakiekolwiek dane początkowe zmiennych decyzyjnych np. 1 i 2.

W komórce **f2** wpisujemy funkcję celu tzn:

$$\boxed{= \textbf{SUMA.ILOCZYNÓW(b2:c2;b4:c4)}}$$

Pojawi się w niej wynik 650 $(250 \cdot 1 + 200 \cdot 2)$.

W szóstym i siódmym wierszu wpisujemy ograniczenia: w komórkach **b6** i **c6** liczby 1,3 i 1,2 a w komórkach **b7** i **c7** liczby 1,2 i 1.

W komórce **d6** wpisujemy wzór

$$\boxed{\textbf{= SUMA.ILOCZYNÓW(b6:c6;b4:c4)}}$$

W komórce **d7** wpisujemy wzór

$$\boxed{\textbf{= SUMA.ILOCZYNÓW(b7:c7;b4:c4)}}$$

Pojawią się w nich odpowiednio liczby 3,7 i 3,2.

W komórkach **f6** i **f7** wpisujemy prawe strony warunków ograniczających czyli 180 i 200.

	A	B	C	D	E	F
1	PRZYKŁAD					
2	współrzędne funkcji celu	250	200	funkcja celu	f(x_1,x_2)	650
3	zmienne decyzyjne	X_1	X_2			
4	wartości zmiennych dec.	1	2			
5	Ograniczenia			wartość lewej strony	nierówność	wartość prawej strony
6	[1]	1,3	1,2	3,7	<=	180
7	[2]	1,2	1	3,2	<=	200

Otwieramy zakładkę **Narzędzia**, a w niej zakładkę **Solver**.

W okienku **Komórka docelowa** wpisujemy **f2**. **Zoptymalizuj wynik** zaznaczamy **Maksimum**.

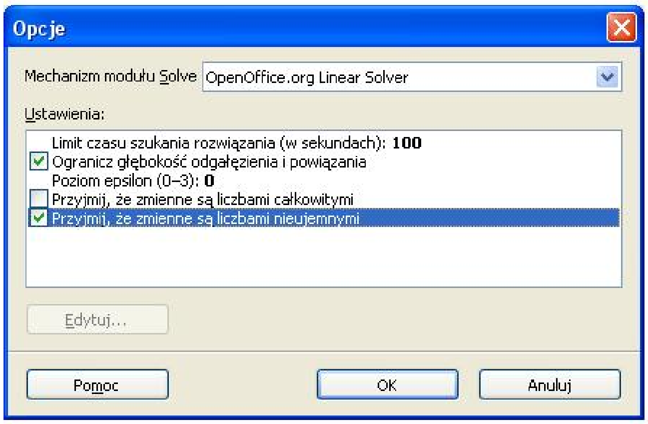
W okienku **Komórki dla zmiennych** wpisujemy **b4:c4**.

W ograniczeniach wpisujemy:

W pierwszym wierszu w kolumnie **Odwołanie do komórki** wpisujemy **d6** w kolumnie **Operator** wybieramy <=, w kolumnie **Wartość** wpisujemy **f6**.

W drugim wierszu w kolumnie **Odwołanie do komórki** wpisujemy **d7** w kolumnie **Operator** wybieramy <=, w kolumnie **Wartość** wpisujemy **f7**.

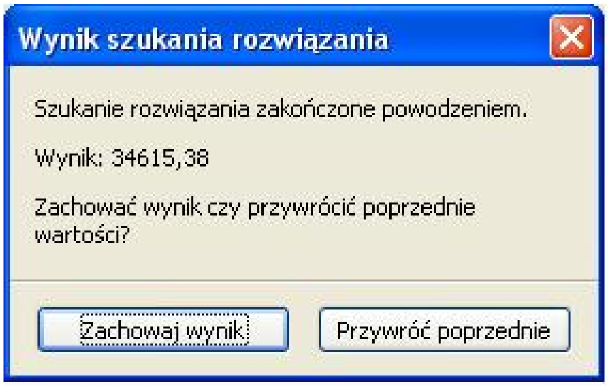
Otwieramy zakładkę **Opcje** (na dole po lewej stronie okienka).



Zaznaczamy opcję **Przyjmij, że zmienne są liczbami nieujemnymi**.

Wychodzimy z tej zakładki naciskając **OK** i wybieramy **Znajdź rozwiązanie**.

Pojawia się małe okienko pt. **Wynik szukania rozwiązania** zawierające informacje:



Szukanie rozwiązania zakończone powodzeniem

Wynik: 34615,38

Zachować wynik czy przywrócić poprzednie wartości?

Wybieramy **Zachowaj wynik** powracając do głównego ekranu arkusza kalkulacyjnego.

W komórce **b4** pojawi się liczba 138,46, w komórce **c4** liczba 0, w komórce **d6** liczba 180, w komórce **d7** liczba 166,15 i w komórce f2 liczba 34615,38.

Otrzymujemy zatem rozwiązanie:

Maksymalną wartość funkcja celu osiągnie przy $x_1 = 138{,}46, x_2 = 0$. Wynosi ona 34615,38.

ANALIZA POOPTYMALIZACYJNA

Analiza pooptymalizacyjna polega po pierwsze na zbadaniu ile mamy rozwiązań, a po drugie jak zmieni się rozwiązanie, jeśli zmienimy niektóre parametry w zadaniu.

W wypadku problemu nr 1 mamy następujące twierdzenia:

Twierdzenie 1. Jeśli w końcowej tablicy sympleksowej, liczba $c_j - z_j$ jest równa 0 dla pewnej zmiennej **niebazowej**, to problem ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Twierdzenie 2. Jeśli w końcowej tablicy sympleksowej, liczby $c_j - z_j$ są różne od 0 dla wszystkich zmiennych **niebazowych**, to problem ma tylko jedno rozwiązanie.

Przykład

Rozważamy problem.

$$f = x_1 + x_2, \quad \text{maksimum},$$
$$2x_1 + 2x_2 \leqslant 12,$$
$$x_1 + 3x_2 \leqslant 12,$$
$$x_1, x_2 \geqslant 0.$$

Tworzymy postać kanoniczną

$$f = x_1 + x_2 + 0s_1 + 0s_2, \rightarrow \text{maksimum},$$
$$2x_1 + 2x_2 + s_1 = 12,$$
$$x_1 + 3x_2 + s_2 = 12,$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2 \geqslant 0.$$

Zbudujmy początkową tablicę sympleksową

c_j		1	1	0	0	
c_B	bazowe	x_1	x_2	s_1	s_2	b_i
0	s_1	2	2	1	0	12
0	s_2	1	3	0	1	12
z_j		0	0	0	0	
$c_j - z_j$		1	1	0	0	

W ostatnim wierszu mamy dwie liczby dodatnie i obie równe 1. Zatem możemy sobie wybrać, czy do bazy wprowadzamy x_1, czy x_2.

Jeśli wybierzemy x_1, to już po pierwszym kroku (pomijamy szczegóły) otrzymujemy końcową tablicę sympleksową postaci

c_j		1	1	0	0	
c_B	bazowe	x_1	x_2	s_1	s_2	b_i
1	x_1	1	1	$1/2$	0	6
0	s_2	0	2	$-1/2$	1	6
z_j		1	1	$1/2$	0	
$c_j - z_j$		0	0	$-1/2$	0	

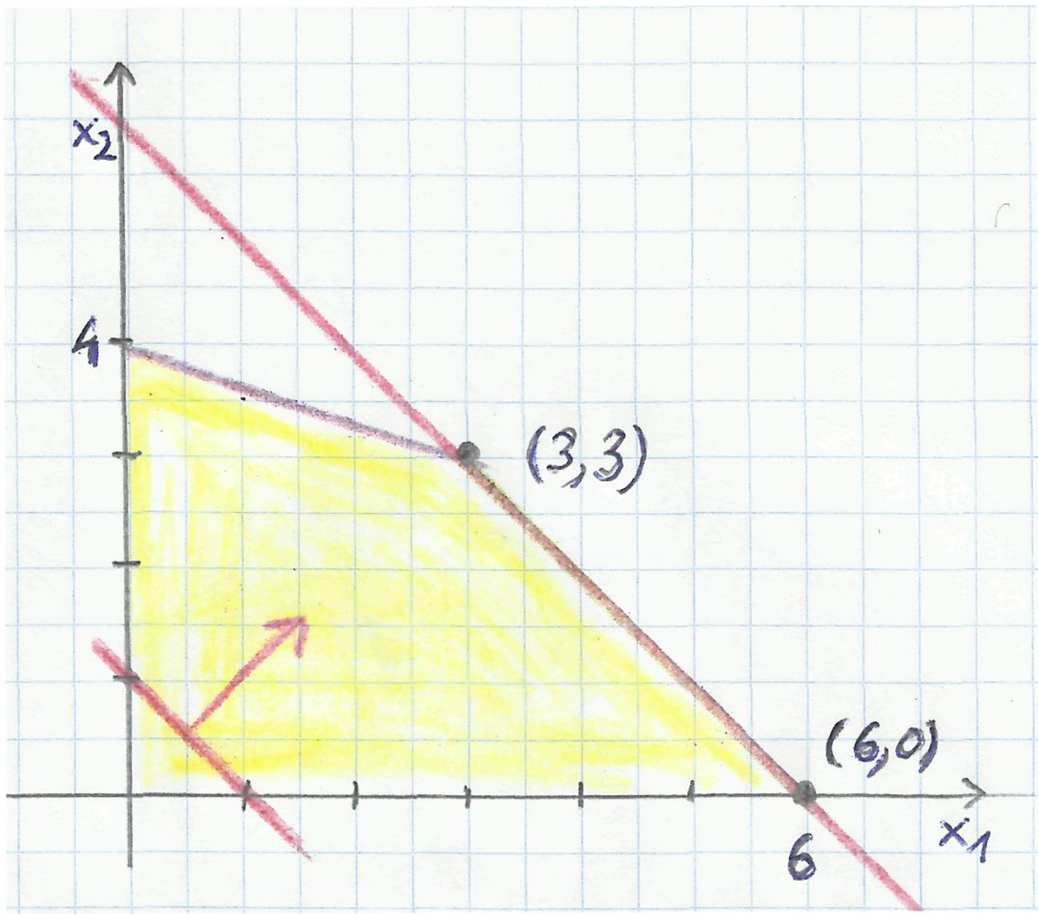
Rozwiązaniem bazowym (i optymalnym) jest $x_2 = s_1 = 0$, $x_1 = 6$, $s_1 = 6$; $f = 6 + 0 = 6$.

Jeśli wybierzemy x_2, to po drugim kroku (ponownie pomijamy szczegóły) otrzymujemy końcową tablicę sympleksową postaci:

c_j		1	1	0	0	
c_B	bazowe	x_1	x_2	s_1	s_2	b_i
1	x_1	1	0	$-1/4$	$1/2$	3
1	x_2	0	1	$3/4$	$-1/2$	3
z_j		1	1	$1/2$	0	
$c_j - z_j$		0	0	$-1/2$	0	

Rozwiązaniem bazowym (i optymalnym) tym razem jest $s_2 = s_1 = 0$, $x_1 = 3$, $x_2 = 3$; $f = 3 + 3 = 6$.

Na rysunku 2 widzimy, że proste o równaniu $x_1 + x_2 = c$ są równoległe do prostej o równaniu $2x_1 + 2x_2 = 12$ będącej „ograniczeniem”. Rozwiązaniem jest każdy punkt odcinka łączącego punkty $(6, 0)$ i $(3, 3)$.



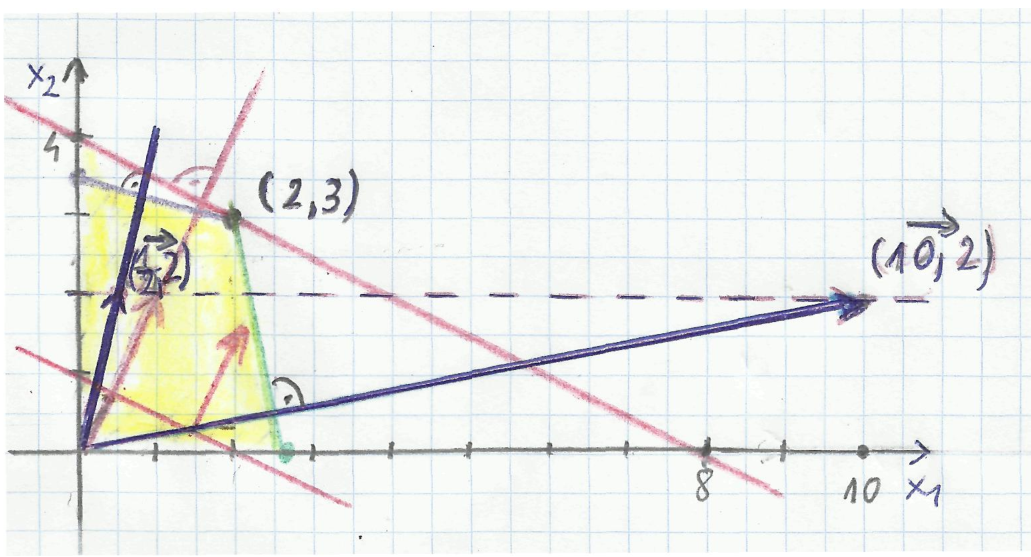
Rysunek 2

W problemie typu 2 zmiany mogą dotyczyć: liczby zmiennych, dodania lub usunięcia warunków ograniczających, zmiany współczynników funkcji celu, zmiany wspólczynników w warunkach ograniczających.

My omówimy tylko **zmiany współczynników funkcji celu**. Zajmiemy się tym zagadnieniem tylko dla dwóch zmiennych, wtedy bowiem zagadnienie ma prostą interpretację geometryczną.

Rozważmy przykład

$$f = x_1 + 2x_2 \to \text{maksimum},$$
$$5x_1 + x_2 \leqslant 13,$$
$$x_1 + 4x_2 \leqslant 14,$$
$$x_1, x_2 \geqslant 0.$$



Rysunek 3

Na rysunku 3 czerwony wektor jest prostopadły do prostej o równaniu $x_1 + 2x_2 = c$ i przesuwając prostą o takim równaniu w tym kierunku nie opuszczając dopuszczalnego obszaru (kolor żółty) najdalej można ją przesunąc do punktu $(2, 3)$. I to jest rozwiązaniem naszego problemu. Zakładamy, że stała $c_2 = 2$ się nie zmienia, natomiast zmieniamy współrzędną c_1. Wtedy wektor prostopadły do prostej o równaniu $c_1x_1 + 2x_2 = c$ ma współrzędne $(c_1, 2)$. Zmniejszając c_1 widzimy, że w momencie kiedy c_1 będzie mniejsze od $1/2$ kąt pomiędzy tym wektorem a prostą o równaniu $x + 4y = 14$ ograniczającą obszar stanie się rozwarty i wówczas rozwiązaniem będzie nie punkt $(2, 3)$, ale punkt $\left(0, 3\frac{1}{2}\right)$. Analogicznie zwiększając c_1 widzimy, że w momencie kiedy

c_1 przekroczy 10 rozwiązaniem będzie punkt $\left(2\frac{3}{5}, 0\right)$. Zatem rozwiązanie się nie zmieni dla $c_1 \in [1/2; 10]$.

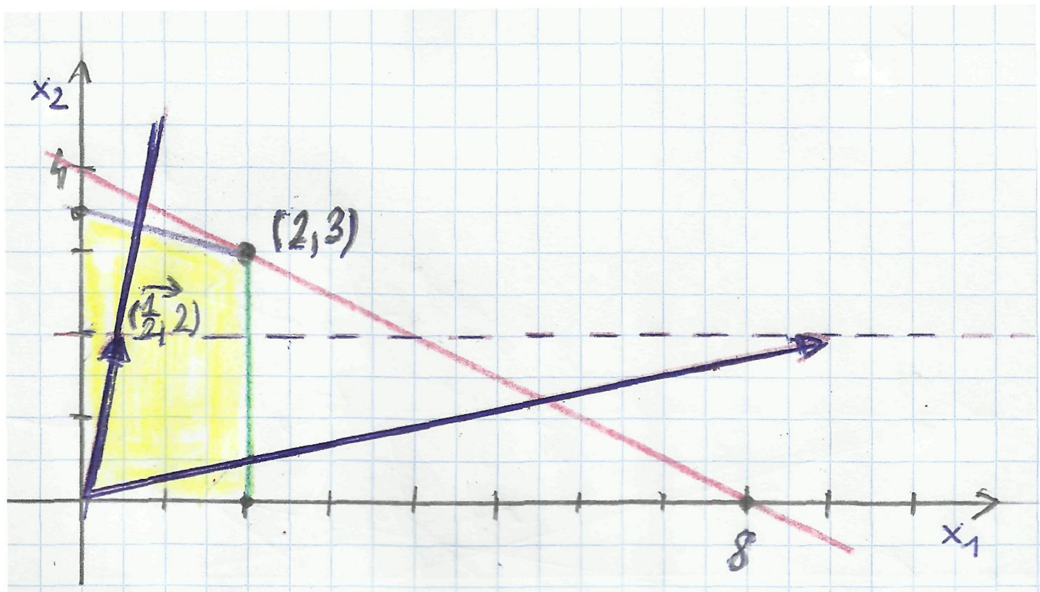
Rysunek 4

Na rysunku 4 widzimy co się dzieje, jak zmienia się c_2 przy ustalonym $c_1 = 1$. Przeprowadzając podobną jak powyżej analizę widzimy, że rozwiązanie nie zmieni się dla $c_2 \in \left[\frac{1}{5}; 4\right]$.

A teraz zmienimy nieco nasz problem na następujący:

$$f = x_1 + 2x_2 \to \text{maksimum},$$
$$5x_1 \leqslant 2,$$
$$x_1 + 4x_2 \leqslant 14,$$
$$x_1, x_2 \geqslant 0.$$

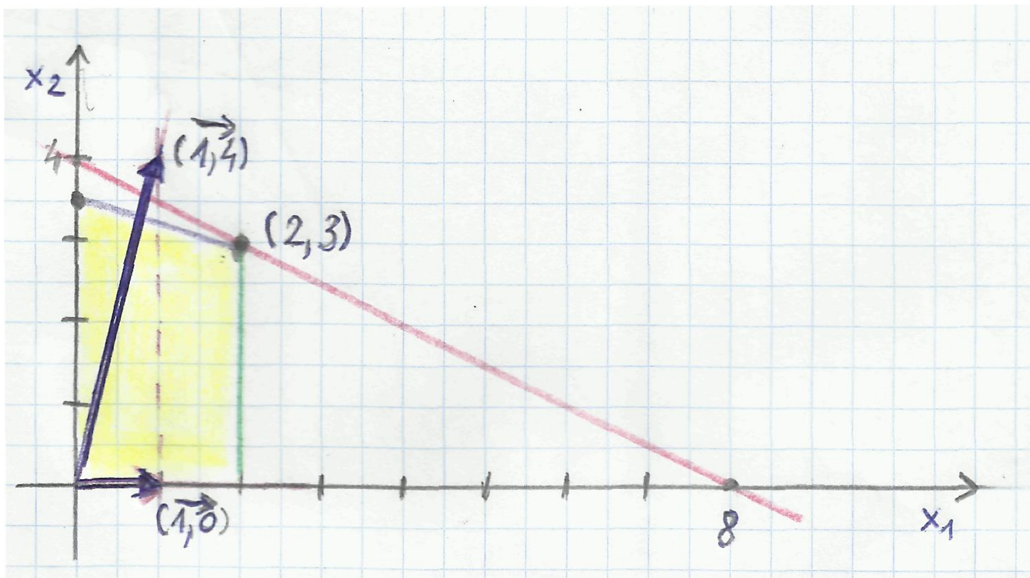
Na rysunku 5 widzimy, że przy stałym $c_2 = 2$, rozwiązanie nie zmieni się dla $c_1 \in \left[\frac{1}{2}; \infty\right)$.



Rysunek 5

Na rysunku 6 widzimy, że przy stałym $c_1 = 1$, rozwiązanie nie zmieni się dla $c_2 \in [0; 4]$.

Dla wartości granicznych będzie nieskończenie wiele rozwiązań.



Rysunek 6

DODATEK

W dodatku tym jest podane są przykłady zadań programowania liniowego z losowanymi danymi liczbowymi (z pewnych przedziałow), z jednoczesną demonstracją kolejnych tablic sympleksowych. Pokazują one możliwe przypadki przejścia z jednej tablicy do drugiej. Szczególnie ciekawe są przykłady (stosunkowo rzadkie), w których zmienna najpierw wchodzi do bazy, a w kolejnym kroku jest z niej usuwana.